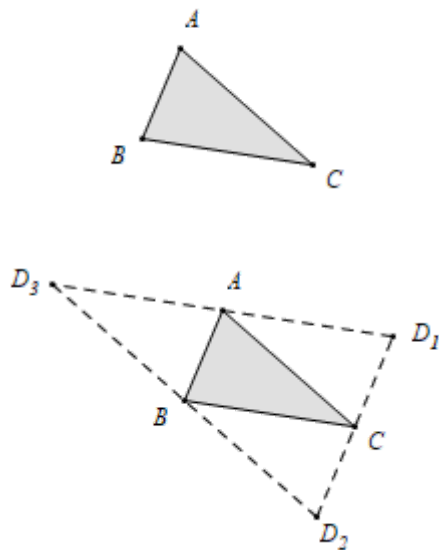


第2讲二次函数与四边形存在性

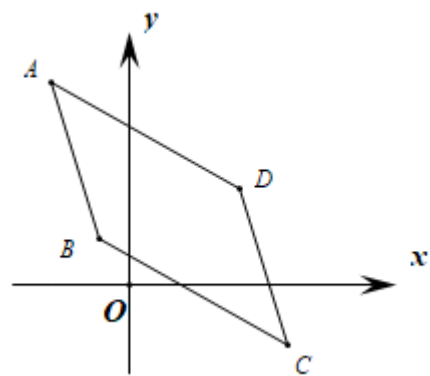
1. 平行四边形

如图，在平面内找一点D，以A、B、C、D为顶点的四边形为平行四边形。



教法备注

如图，在平行四边形ABCD中，有
$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$



【坐标平移】

从平移的角度，

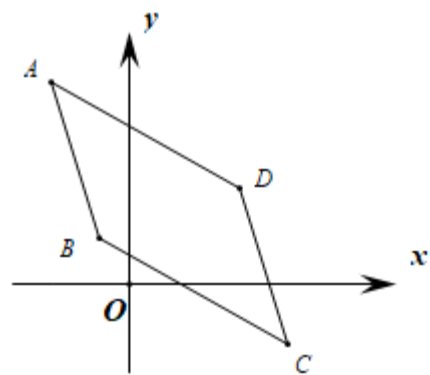
AD平移得到BC，由平移坐标公式，

可得 $x_B - x_A = x_C - x_D$ ， $y_B - y_A = y_C - y_D$ ；

或者AB平移得到DC，由平移坐标公式，

可得 $x_D - x_A = x_C - x_B$ ， $y_D - y_A = y_C - y_B$ ，

移项可得
$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$



【中点坐标公式】

连接AC、BD交于点M，则AC与BD互相平分，即AC的中点也是BD的中点；

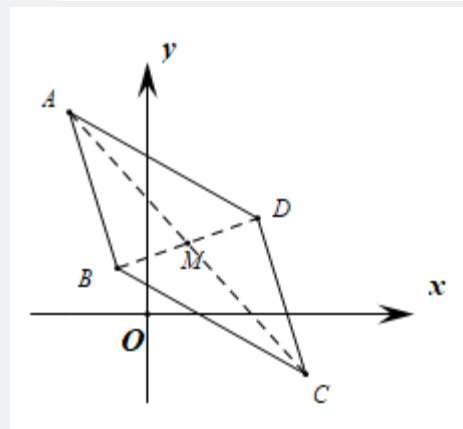
从AC的角度，由中点坐标公式，可得

$$M\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right);$$

从BD的角度，由中点坐标公式，可得

$$M\left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2}\right).$$

$$\text{故有} \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}.$$



解题步骤如下：

第一步：写出或设出三个顶点的坐标；

第二步：以“哪两个顶点相对”（即对角线）为分类标准，分三类讨论，利用上述模型，求出第四个顶点的坐标；

第三步：将第四个顶点坐标代入相应的函数关系式即可。

举例：问以A、B、C、D为顶点的四边形为平行四边形，求点D的坐标。

先写出或设出三个顶点的坐标，如 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 及 $C(x_3, y_3)$ ；

再分三种情况讨论如下：

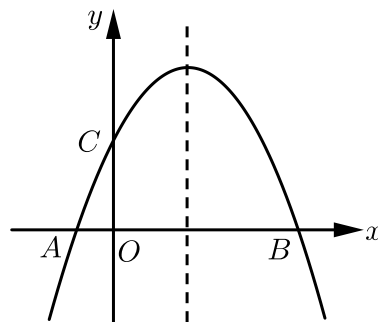
①当AB为对角线时，有 $\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_D \\ y_1 + y_2 = y_3 + y_D \end{cases}$ ，则 $\begin{cases} x_D = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_D = y_1 + y_2 - y_3 \end{cases}$ ，代入点D所在图象的函数关系式；

②当AC为对角线时，有 $\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_D \\ y_1 + y_3 = y_2 + y_D \end{cases}$ ，则 $\begin{cases} x_D = x_1 + x_3 - x_2 \\ y_D = y_1 + y_3 - y_2 \end{cases}$ ，代入点D所在图象的函数关系式；

③当AD为对角线时，有 $\begin{cases} x_1 + x_D = x_2 + x_3 \\ y_1 + y_D = y_2 + y_3 \end{cases}$ ，则 $\begin{cases} x_D = x_2 + x_3 - x_1 \\ y_D = y_2 + y_3 - y_1 \end{cases}$ ，代入点D所在图象的函数关系式。

典题精练1

1. 如图，抛物线经过 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 三点。



- (1) 求抛物线的解析式 .
- (2) 在抛物线的对称轴上有一点 P , 使 $PA + PC$ 的值最小 , 求点 P 的坐标 .
- (3) 点 M 为 x 轴上一动点 , 在抛物线上是否存在一点 N , 使以 A, C, M, N 四点构成的四边形为平行四边形 ? 若存在 , 求点 N 的坐标 ; 若不存在 , 请说明理由 .

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$.

(2) $P(1, 1)$.

(3) 存在 , $\left(2, \frac{3}{2}\right)$, $\left(1 + \sqrt{7}, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(1 - \sqrt{7}, -\frac{3}{2}\right)$.

【解析】 (1) 设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$,

$\because A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 三点在抛物线上 ,

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ c = \frac{3}{2} \end{cases} ,$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{3}{2} \end{cases} .$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 : $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$.

(2) $\because$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$,
 $\therefore$ 其对称轴为直线 : $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$.

连接 BC , 设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$\because B(3, 0)$, $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$,

$$\therefore \begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} ,$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} .$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 .$$

$$\therefore P(1, 1) .$$

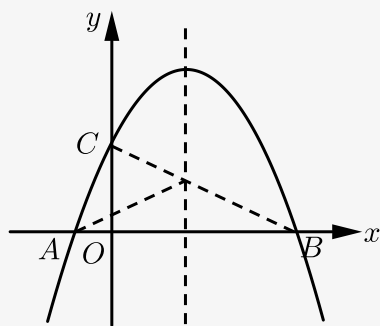


图 1

(3) 存在 . 如图2所示 .

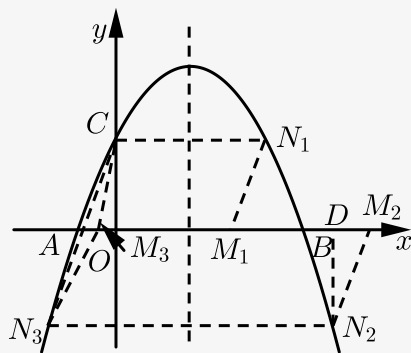


图 2

①当点 N 在 x 轴上方时 ,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$,

$$\therefore N_1\left(2, \frac{3}{2}\right) ;$$

②当点 N 在 x 轴下方时 ,

如图 , 过点 N_2 作 $N_2D \perp x$ 轴于点 D ,

$$\therefore \triangle AN_2D \cong \triangle M_2CO .$$

$$\therefore N_2D = OC = \frac{3}{2} ,$$

即 N_2 点的纵坐标为 $-\frac{3}{2}$.

$$\therefore -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} .$$

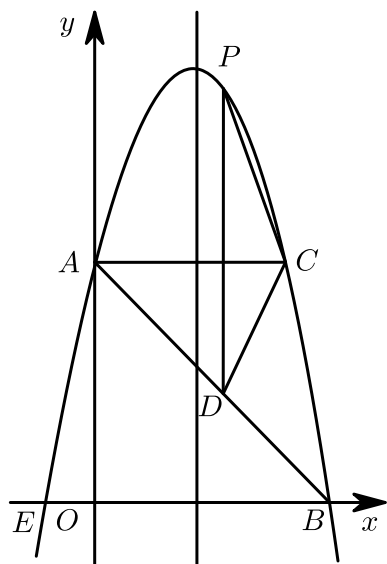
解得 $x = 1 + \sqrt{7}$ 或 $x = 1 - \sqrt{7}$,

$$\therefore N_2\left(1 + \sqrt{7}, -\frac{3}{2}\right) , N_3\left(1 - \sqrt{7}, -\frac{3}{2}\right) .$$

综上所述 , 点 N 的坐标为 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$, $\left(1 + \sqrt{7}, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(1 - \sqrt{7}, -\frac{3}{2}\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $(2, 9)$ ，与 y 轴交于点 $A(0, 5)$ ，与 x 轴交于点 E 、 B 。



- (1) 求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的表达式。
- (2) 过点 A 作 AC 平行于 x 轴，交抛物线于点 C ，点 P 为抛物线上的一点（点 P 在 AC 上方），作 PD 平行于 y 轴交 AB 于点 D ，问当点 P 在何位置时，四边形 $APCD$ 的面积最大？并求出最大面积。
- (3) 若点 M 在抛物线上，点 N 在其对称轴上，使得以 A 、 E 、 N 、 M 为顶点的四边形是平行四边形，且 AE 为其一边，求点 M 、 N 的坐标。

【答案】 (1) $y = -x^2 + 4x + 5$ 。

(2) 当 P 点坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{35}{4})$ 时， $S_{\text{四边形}APCD\text{最大}} = \frac{25}{2}$ 。

(3) 当 M 点的坐标为 $(1, 8)$ 时， N 点坐标为 $(2, 13)$ ，
当 M 点的坐标为 $(3, 8)$ 时， N 点坐标为 $(2, 3)$ 。

【解析】 (1) 设抛物线解析式为 $y = a(x - 2)^2 + 9$ ，

$\because$ 抛物线与 y 轴交于点 $A(0, 5)$ ，

$$\therefore 4a + 9 = 5,$$

$$\therefore a = -1,$$

$$\therefore y = -(x - 2)^2 + 9 = -x^2 + 4x + 5.$$

(2) 当 $y = 0$ 时， $-x^2 + 4x + 5 = 0$ ，

$$\therefore x_1 = -1, x_2 = 5,$$

$$\therefore E(-1, 0), B(5, 0).$$

设直线 AB 的解析式为 $y = mx + n$ ，

$$\because A(0, 5), B(5, 0),$$

$$\therefore m = -1, n = 5,$$

$$\therefore \text{直线} AB \text{的解析式为} y = -x + 5.$$

$$\text{设} P(x, -x^2 + 4x + 5),$$

$$\therefore D(x, -x + 5),$$

$$\therefore PD = -x^2 + 4x + 5 + x - 5 = -x^2 + 5x.$$

$$\therefore AC = 4,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}APCD} = \frac{1}{2} \times AC \times PD = 2(-x^2 + 5x) = -2x^2 + 10x,$$

$$\therefore \text{当} x = -\frac{10}{2 \times (-2)} = \frac{5}{2} \text{时, 此时} P(\frac{5}{2}, \frac{35}{4}),$$

$$\therefore S_{\text{四边形}APCD \text{最大}} = \frac{25}{2}.$$

(3) 如图, 过M作MH垂直于对称轴, 垂足为H.

$$\therefore MN \parallel AE,$$

$$MN = AE,$$

$$\therefore \triangle HMN \cong$$

$$\triangle AOE,$$

$$\therefore$$

$$HM = OE = 1$$

$$,$$

$$\therefore M \text{点的横坐标}$$

$$\text{为} x = 3 \text{或} x = 1$$

$$,$$

$$\text{当} x = 1 \text{时, } M$$

$$\text{点纵坐标为} 8,$$

$$\text{当} x = 3 \text{时, } M \text{点纵坐标为} 8,$$

$$\therefore M \text{点的坐标为} M_1(1, 8) \text{或} M_2(3, 8).$$

$$\therefore A(0, 5), E(-1, 0),$$

$$\therefore \text{直线} AE \text{解析式为} y = 5x + 5,$$

$$\therefore MN \parallel AE,$$

$$\therefore MN \text{的解析式为} y = 5x + b.$$

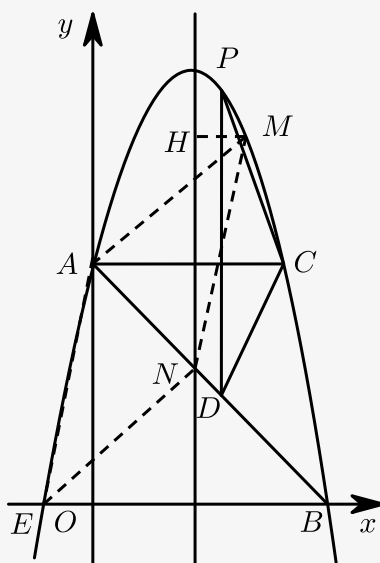
$$\therefore \text{点} N \text{在抛物线对称轴} x = 2 \text{上},$$

$$\therefore N(2, 10 + b),$$

$$\therefore AE^2 = OA^2 + OE^2 = 26,$$

$$\therefore MN = AE,$$

$$\therefore MN^2 = AE^2,$$



$$\therefore MN^2 = (2-1)^2 + [8 - (10+b)]^2 = 1 + (b+2)^2 .$$

$\therefore M$ 点的坐标为 $M_1(1, 8)$ 或 $M_2(3, 8)$,

$\therefore$ 点 M_1, M_2 关于抛物线对称轴 $x = 2$ 对称 ,

$\therefore$ 点 N 在抛物线对称轴上 ,

$$\therefore M_1N = M_2N ,$$

$$\therefore 1 + (b+2)^2 = 26 ,$$

$$\therefore b = 3 \text{ 或 } b = -7 ,$$

$$\therefore 10 + b = 13 \text{ 或 } 10 + b = 3 ,$$

$\therefore$ 当 M 点的坐标为 $(1, 8)$ 时 , N 点坐标为 $(2, 13)$,

当 M 点的坐标为 $(3, 8)$ 时 , N 点坐标为 $(2, 3)$.

【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

典题精练2

3. 已知抛物线 $y = ax^2 - 2x + c$ (a, c 为常数, $a \neq 0$) 与直线 $y = kx + b$ 都经过 $A(0, -3)$, $B(3, 0)$ 两点, P 是该抛物线上的一个动点, 过点 P 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 Q .
- (1) 求此抛物线和直线 AB 的解析式.
- (2) 当点 P 在直线 AB 下方时, 求 $PQ + \sqrt{2}BQ$ 取得最大值时点 P 的坐标.
- (3) 设该抛物线的顶点为 C , 直线 AB 与该抛物线的对称轴交于点 E . 当以点 P, Q, C, E 为顶点的四边形是平行四边形时, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3, y = x - 3$.

$$(2) P\left(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}\right).$$

$$(3) (2, -3), \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right), \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right).$$

【解析】 (1) 将 A, B 代入抛物线中,

$$\begin{cases} c = -3 \\ 9a - 6 + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$,

将 A, B 代入直线中,

$$\begin{cases} b = -3 \\ 3k + b = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

∴直线解析式 $y = x - 3$.

(2) 设 $P(m, m^2 - 2m - 3)$, 则 $Q(m, m - 3)$.

根据题意, 得 $0 < m < 3$,

$$\therefore PQ = m - 3 - (m^2 - 2m - 3) = -m^2 + 3m.$$

设直线 PQ 与 x 轴交于点 H , 则 $H(m, 0)$.

$$\because OA = OB = 3,$$

$$\therefore \angle OBA = 45^\circ,$$

$$\therefore BQ = \sqrt{2}BH = (3 - m)\sqrt{2}.$$

$$\therefore PQ + 2\sqrt{2}BQ = -m^2 + 3m + 2(3 - m) = -m^2 + m + 6$$

$$= -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}.$$

∴当 $m = \frac{1}{2}$ 时, $PQ + \sqrt{2}BQ$ 取得最大值.

此时 P 点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}\right)$.

(3) $y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$,

故 $C(1, -4)$,

$$\text{令 } x = 1, y = 1 - 3 = -2,$$

$$\therefore E(1, -2),$$

$$\text{则 } CE = -2 - (-4) = 2,$$

若以 P 、 Q 、 C 、 E 为顶点的四边形为平行四边形,

则 $PQ = CE$,

$$\therefore |-m^2 + 3m| = 2,$$

$$\therefore \text{① } -m^2 + 3m = 2,$$

解得 $m = 1$ (舍) 或 2 ,

$$\therefore P_1(2, -3);$$

$$\text{② } -m^2 + 3m = -2,$$

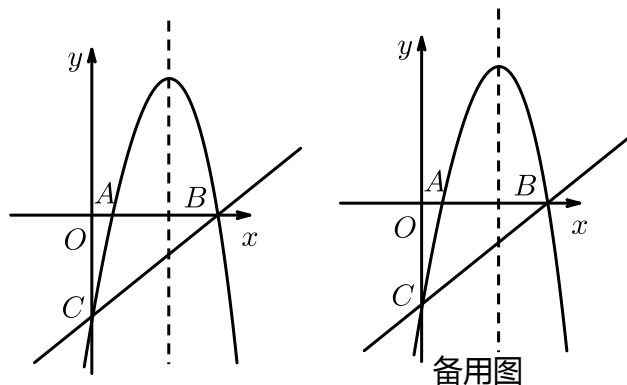
$$\text{解得 } m = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$$\therefore P_2\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right), P_3\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right),$$

$$\text{故坐标为 } (2, -3), \left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right), \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

4. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + 6x + c$ 交 x 轴于 A 、 B 两点, 交 y 轴于点 C , 直线 $y = x - 5$ 经过点 B , C .



(1) 求抛物线的解析式.

(2) 过点A作 $AM \perp BC$ 于点M, 过抛物线上一动点P (不与点B, C重合), 作直线AM的平行线交直线BC于点Q, 若以点A, M, P, Q为顶点的四边形是平行四边形, 求点P的横坐标.

【答案】(1) $y = -x^2 + 6x - 5$.

(2) 4或 $\frac{5 + \sqrt{41}}{2}$ 或 $\frac{5 - \sqrt{41}}{2}$.

【解析】(1) 当 $x = 0$ 时, $y = x - 5 = -5$,

$y = 0$ 时, $x = 5$,

$\therefore C(0, -5), B(5, 0)$,

代入 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\therefore \begin{cases} 25a + 30 + c = 0 \\ c = -5 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = -1 \\ c = -5 \end{cases}.$$

$\therefore y = -x^2 + 6x - 5$.

(2) 当 $y = 0$ 时,

$$-x^2 + 6x - 5 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 5,$$

$\therefore A(1, 0)$,

$\therefore \triangle OCB$ 的等腰直角三角形,

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ,$$

$\therefore AM \perp BC$,

$\therefore \triangle AMB$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AM = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 2\sqrt{2},$$

$\therefore$ 以A, M, P, Q为顶点四边形为平行四边形,

$\therefore AM \parallel PQ, PQ = AM, PQ \perp BC$,

作 $PD \perp x$ 轴交BC于D,

$$\therefore \angle PDQ = 45^\circ, PD = \sqrt{2}PQ = 4.$$

设 $P(m, -m^2 + 6m - 5)$, 则 $D(m, m - 5)$,

①当 P 在直线 BC 上方,

$$PD = (-m^2 + 6m - 5) - (m - 5) = 4,$$

$$m_1 = 1 \text{ (舍)}, m_2 = 4,$$

②当 P 在直线 BC 下方,

$$PD = (m - 5) - (-m^2 + 6m - 4) = 4,$$

$$m_3 = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}, m_4 = \frac{5 - \sqrt{41}}{2}.$$

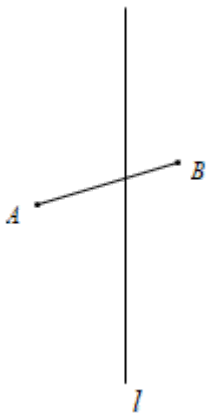
$$\therefore P \text{ 点横坐标为 } 4, \text{ 或 } \frac{5 + \sqrt{41}}{2} \text{ 或 } \frac{5 - \sqrt{41}}{2}.$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

2. 矩形

有一个角是 _____ 的 _____ 是矩形. 因此, 矩形存在性问题可转化为 _____ 存在性加 _____ 存在性问题.

如点 C 是直线 l 上一点, 在平面内找一点 D 使得以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形为矩形.



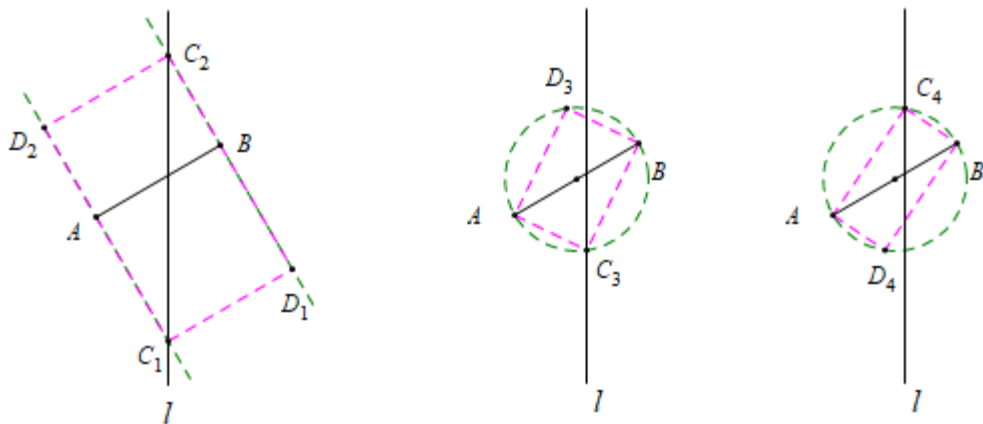
第一步, 由“两线一圆”, 先在直线 l 上找到点 C 使得 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 这样, 就相当于找到了矩形的一半, 满足情况的点 C 有 _____ 个;

第二步, 由“平移法”或“中点法”找到点 D 使得以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形为平行四边形, 这样作出的平行四边形就是矩形.

教法备注

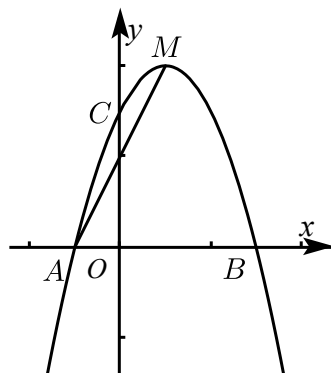
有一个角是直角的平行四边形是矩形. 因此, 矩形存在性问题可转化为直角三角形存在性加平行四边形存在性问题.

如图



典题精练

5. 如图, 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 C , 已知 $\tan \angle CAB = 3$, $OB = OC$.



- (1) 求抛物线解析式.
- (2) 点 M 是抛物线顶点, 点 P 是 y 轴上一点, 点 Q 是坐标平面内一点, 以 A 、 M 、 P 、 Q 为顶点的四边形是矩形, 求点 Q 坐标.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) $Q_1\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, $Q_2\left(2, \frac{7}{2}\right)$, $Q_3(0, 2 - \sqrt{5})$, $Q_4(0, 2 + \sqrt{5})$.

【解析】 (1) 在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中: $\tan \angle CAB = \frac{OC}{OA} = 3$,

$$\therefore OC = 3OA.$$

设 $OA = a$, 则 $OB = OC = 3a$,

$$\therefore A(-a, 0), B(3a, 0), C(0, 3a),$$

$$y = -x^2 + bx + c = -(x + a)(x - 3a),$$

把 $C(0, 3a)$ 代入解析式得:

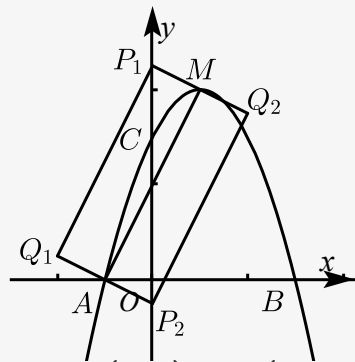
$$3a = -a \cdot (-3a),$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3.$$

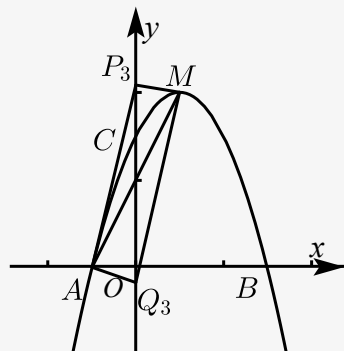
(2) $M(1, 4)$

① 当 AM 为边时, 分别过 M, A 作 AM 垂线, 交 y 轴于点 P_1, P_2 ,



$$\text{易得 } P_1\left(0, \frac{9}{2}\right), P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right), \\ \therefore Q_1\left(-2, \frac{1}{2}\right), Q_2\left(2, \frac{7}{2}\right)$$

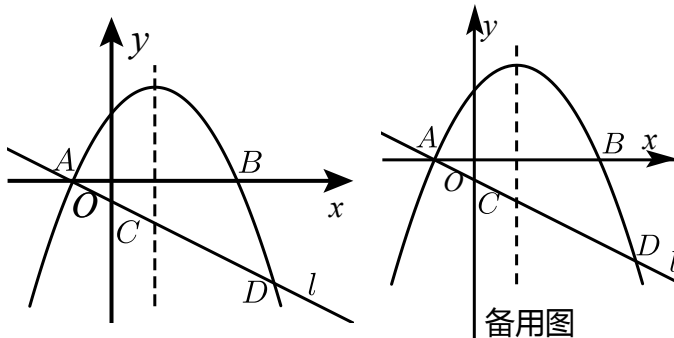
② 当 AM 为对角线时,



$$\text{易得 } Q_3(0, 2 - \sqrt{5}), Q_4(0, 2 + \sqrt{5}) \\ \text{故答案为: } Q_1\left(-2, \frac{1}{2}\right), Q_2\left(2, \frac{7}{2}\right), Q_3(0, 2 - \sqrt{5}), Q_4(0, 2 + \sqrt{5}).$$

【标注】【知识点】二次函数与特殊平行四边形

6. 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3a (a < 0)$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 经过点 A 的直线 $l: y = kx + b$ 与 y 轴负半轴交于点 C , 与抛物线的另一个交点为 D , 且 $CD = 4AC$.



(1) 求 A, B 两点的坐标及抛物线的对称轴.

- (2) 求直线 l 的函数表达式(其中 k 、 b 用含 a 的式子表示) .
- (3) 点 E 是直线 l 上方的抛物线上的动点, 若 $\triangle ACE$ 的面积的最大值为 $\frac{5}{4}$, 求 a 的值 .
- (4) 设 P 是抛物线对称轴上的一点, 点 Q 在抛物线上, 以点 A 、 D 、 P 、 Q 为顶点的四边形能否成为矩形? 若能, 求出点 P 的坐标. 若不能, 请说明理由 .

【答案】 (1) $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 对称轴为直线 $x = 1$.

(2) $y = ax + a$.

(3) $a = -\frac{2}{5}$.

(4) 点 A 、 D 、 P 、 Q 为顶点的四边形能成为矩形, 点 P 的坐标为 $\left(1, -\frac{26\sqrt{7}}{7}\right)$ 或 $(1, -4)$.

【解析】 (1) 当 $y = 0$ 时, $ax^2 - 2ax - 3a = 0$,

解得: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,

$\therefore A(-1, 0)$, $B(3, 0)$,

对称轴为直线 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$.

(2) $\because$ 直线 $l: y = kx + b$ 过 $A(-1, 0)$,

$\therefore 0 = -k + b$,

即 $k = b$,

$\therefore$ 直线 $l: y = kx + k$,

$\because$ 抛物线与直线 l 交于点 A , D ,

$\therefore ax^2 - 2ax - 3a = kx + k$,

即 $ax^2 - (2a + k)x - 3a - k = 0$,

$\because CD = 4AC$,

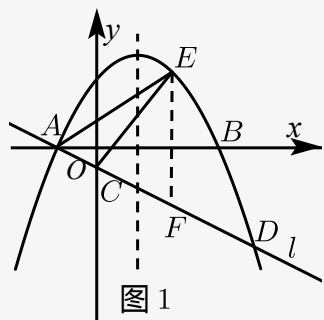
$\therefore$ 点 D 的横坐标为 4 ,

$\therefore -3 - \frac{k}{a} = -1 \times 4$,

$\therefore k = a$,

$\therefore$ 直线 l 的函数表达式为 $y = ax + a$.

(3) 如图1, 过 E 作 $EF \parallel y$ 轴交直线 l 于 F , 设 $E(x, ax^2 - 2ax - 3a)$,



$$\text{则 } F(x, ax+a), EF = ax^2 - 2ax - 3a - ax - a = ax^2 - 3ax - 4a,$$

$$\therefore S_{\triangle ACE} = S_{\triangle AFE} - S_{\triangle CEF}$$

$$= \frac{1}{2}(ax^2 - 3ax - 4a)(x+1) - \frac{1}{2}(ax^2 - 3ax - 4a)x = \frac{1}{2}(ax^2 - 3ax - 4a)$$

$$= \frac{1}{2}a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}a,$$

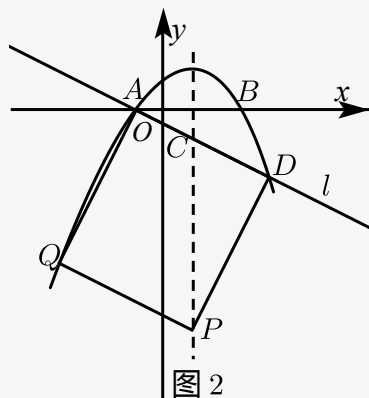
$$\therefore \triangle ACE \text{ 的面积的最大值为 } -\frac{25}{8}a,$$

$$\therefore \triangle ACE \text{ 的面积的最大值为 } \frac{5}{4},$$

$$\therefore -\frac{25}{8}a = \frac{5}{4},$$

$$\text{解得 } a = -\frac{2}{5}.$$

(4) 以点 A 、 D 、 P 、 Q 为顶点的四边形能成为矩形,



$$\text{令 } ax^2 - 2ax - 3a = ax + a, \text{ 即 } ax^2 - 3ax - 4a = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = -1, x_2 = 4,$$

$$\therefore D(4, 5a),$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = 1,$$

$$\text{设 } P(1, m),$$

①如图2, 若 AD 是矩形 $ADPQ$ 的一条边,

$$\text{则易得 } Q(-4, 21a),$$

$$m = 21a + 5a = 26a, \text{ 则 } P(1, 26a),$$

$$\therefore \text{四边形 } ADPQ \text{ 是矩形},$$

$$\therefore \angle ADP = 90^\circ,$$

$$\therefore AD^2 + PD^2 = AP^2,$$

$$\therefore 5^2 + (5a)^2 + 3^2 + (26a - 5a)^2 = 2^2 + (26a)^2,$$

$$\text{即 } a^2 = \frac{1}{7},$$

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore a = -\frac{\sqrt{7}}{7},$$

$$\therefore P\left(1, -\frac{26\sqrt{7}}{7}\right).$$

②如图3，若 AD 是矩形 $APDQ$ 的对角线，

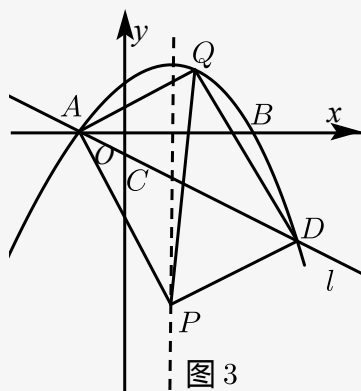


图 3

则易得 $Q(2, -3a)$ ，

$m = 5a - (-3a) = 8a$ ，则 $P(1, 8a)$ ，

$\because$ 四边形 $APDQ$ 是矩形，

$\therefore \angle APD = 90^\circ$ ，

$\therefore AP^2 + PD^2 = AD^2$ ，

$\therefore (-1-1)^2 + (8a)^2 + (1-4)^2 + (8a-5a)^2 = 5^2 + (5a)^2$ ，

即 $a^2 = \frac{1}{4}$ ，

$\because a < 0$ ，

$\therefore a = -\frac{1}{2}$ ，

$\therefore P(1, -4)$ ，

综上所述，点 A 、 D 、 P 、 Q 为顶点的四边形能成为矩形，点 P 的坐标为

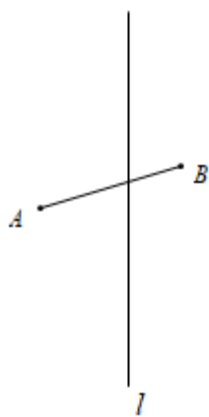
$\left(1, -\frac{26\sqrt{7}}{7}\right)$ 或 $(1, -4)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与面积

3. 菱形

有一组 _____ 相等的 _____ 是菱形。因此，菱形存在性问题可转化为 _____ 存在性加 _____ 存在性问题。

如点 C 是直线 l 上一点，在平面内找一点 D 使得以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形为菱形。

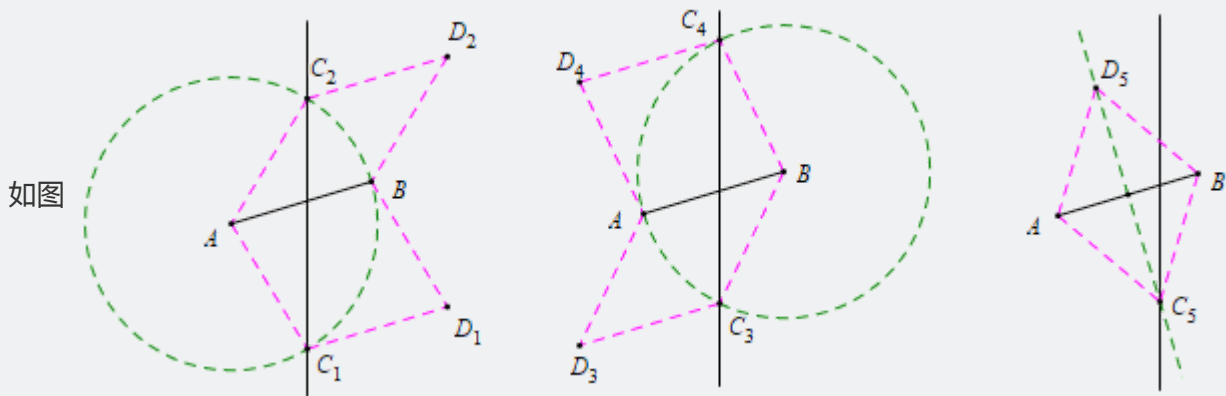


第一步，由“两圆一线”，先在直线 l 找到点 C 使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，这样，就相当于找到了菱形的一半，满足情况的点 C 有 _____ 个；

第二步，由“平移法”或“中点法”找到点 D 使得以点 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形为平行四边形，这样作出的平行四边形就是菱形．

教法备注

有一组邻边相等的平行四边形是菱形．因此，菱形存在性问题可转化为等腰三角形存在性加平行四边形存在性问题．



典题精练

7. 二次函数 $y = ax^2 + 2x + c$ 的图象经过点 $C(0, 3)$ ，与 x 轴分别交于点 A ，点 $B(3, 0)$ ，点 P 是直线 BC 上方的抛物线上一动点．

(1) 求该二次函数的解析式．

(2) 连接 PO ， PC ，将 $\triangle POC$ 沿 y 轴翻折，得到 $\triangle P'OC$ ，当四边形 $POP'C$ 为菱形时，求点 P 的坐标．

(3) 当四边形 $ACPB$ 的面积 S 最大时，求点 P 的坐标．

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) $P\left(\frac{\sqrt{10}}{2} + 1, \frac{3}{2}\right)$.

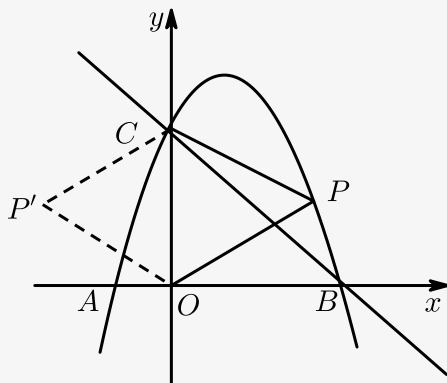
(3) $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$.

【解析】(1) 将点 $C(0, 3)$, $B(3, 0)$ 代入二次函数解析式,

可得 $\begin{cases} 3 = c \\ 0 = a \times 3^2 + 2 \times 3 + c \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = -1 \\ c = 3 \end{cases}$,

故解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2)



$\because$ 四边形 $POP'C$ 是菱形, $C(0, 3)$,

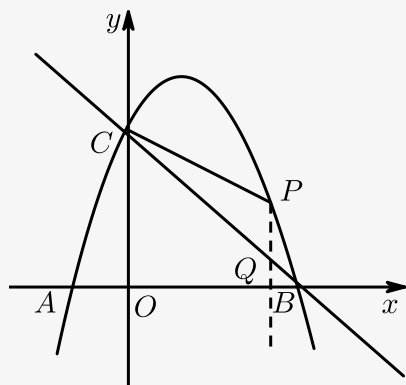
$\therefore$ 点 P 的纵坐标为 $\frac{3}{2}$,

将其代入解析式 $y = -x^2 + 2x + 3$,

$\because$ 点 P 在直线 BC 上方,

$\therefore$ 横坐标要大于 0, 为 $\frac{\sqrt{10}}{2} + 1$, 即点 $P\left(\frac{\sqrt{10}}{2} + 1, \frac{3}{2}\right)$.

(3)



由于 P 在抛物线上, 设 $P(m, -m^2 + 2m + 3)$,

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

将点 $B(3, 0)$, $C(0, 3)$ 代入, 可得解析式为 $y = -x + 3$,

设点 Q 的坐标为 $(m, -m + 3)$,

则 $PQ = -m^2 + 2m + 3 - (-m + 3) = -m^2 + 3m$,

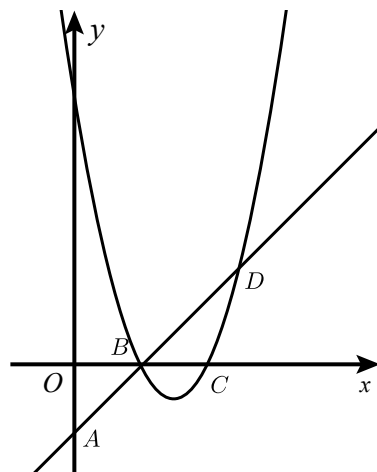
当 $y = 0$ 时, $x = -1.3$,

所以点 $A(-1, 0)$,

$$\begin{aligned}
\therefore S_{\text{四边形}ACPB} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle PCQ} + S_{\triangle PBQ} \\
&= \frac{1}{2} \times AB \times OC + \frac{1}{2} \times PQ \times OF + \frac{1}{2} \times PQ \times FB \\
&= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times (-m^2 + 3m) \times 3 \\
&= -\frac{3}{2} \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{75}{8}, \\
\text{故当 } m &= \frac{3}{2} \text{ 时, 四边形 } ACPB \text{ 面积最大为 } \frac{75}{8}, \\
\text{此时点 } P &\text{ 坐标为 } \left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right).
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与面积

8. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 8$ ($a \geq 1$) 过点 $D(5, 3)$, 与 x 轴交于点 B 、 C (点 B 、 C 均在 y 轴右侧) 且 $BC = 2$, 直线 BD 交 y 轴于点 A .



- (1) 求抛物线的解析式.
 (2) 在直线 BD 上是否存在一点 P 和平面内一点 Q , 使以 Q 、 P 、 B 、 C 四点为顶点的四边形为菱形? 若存在, 请直接写出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = x^2 - 6x + 8$.

(2) 存在, P 点坐标为 $(2 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ 或 $(2 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$ 或 $(3, 1)$ 或 $(4, 2)$.

【解析】 (1) 设 B 点坐标为 $(x_1, 0)$, C 点坐标为 $(x_2, 0)$,

则 x_1 、 x_2 是方程 $ax^2 + bx + 8 = 0$ 的两根,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{8}{a},$$

$$\because BC = |x_1 - x_2| = 2,$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = 4, \text{ 即 } (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4,$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{32}{a} = 4 \text{ ①},$$

把 D 点坐标代入抛物线解析式可得 $25a + 5b + 8 = 3$ ②,

$$\text{由①②可解得} \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=\frac{1}{21} \\ b=-\frac{26}{21} \end{cases} \text{ (舍去) ,}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 6x + 8$.

(2) $\because$ 点 P 在直线 BD 上 ,

$\therefore$ 可设 $P(t, t-2)$,

$$\therefore BP = \sqrt{(t-2)^2 + (t-2)^2} = \sqrt{2}|t-2| ,$$

$$PC = \sqrt{(t-4)^2 + (t-2)^2} = \sqrt{2t^2 - 12t + 20} ,$$

$\therefore$ 以 Q 、 P 、 B 、 C 四点为顶点的四边形为菱形 ,

$\therefore$ 有 BC 为边或 BC 为对角线 ,

当 BC 为边时 , 当 $BP = BC$, 即 $\sqrt{2}|t-2| = 2$, 解得 $t = 2 + \sqrt{2}$ 或 $t = 2 - \sqrt{2}$,

此时 P 点坐标为 $(2 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ 或 $(2 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$;

当 $CP = CB$ 时 , 易知 $P(4, 2)$,

当 BC 为对角线时 , 则有 $BP = PC$, 即 $\sqrt{2}|t-2| = \sqrt{2t^2 - 12t + 20}$,

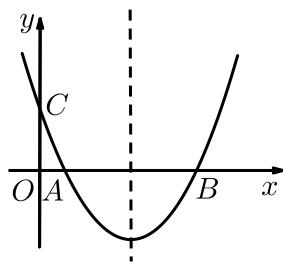
解得 $t = 3$, 此时 P 点坐标为 $(3, 1)$;

当 $CP = CB$ 时 , 易知 $P(4, 2)$.

综上所述存在满足条件的点 P , 其坐标为 $(2 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ 或 $(2 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$ 或 $(3, 1)$ 或 $(4, 2)$.

【标注】【知识点】二次函数与特殊平行四边形

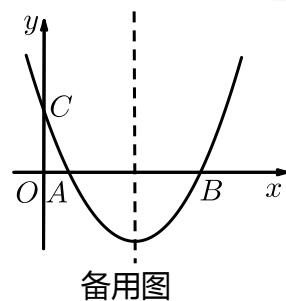
9. 如图 , 抛物线 $y = ax^2 + bx + \frac{5}{2}$ 过点 $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, 与 y 轴相交于点 C .



(1) 求抛物线的解析式 .

(2) 定义 : 平面上的任一点到二次函数图象上与它横坐标相同的点的距离 , 称为点到二次函数图象的垂直距离 . 如 : 点 O 到二次函数图象的垂直距离是线段 OC 的长 . 已知点 E 为抛物线对称轴上的一点 , 且在 x 轴上方 , 点 F 为平面内一点 , 当以 A , B , E , F 为顶点的四边形是边长为 4 的菱形时 , 请求出点 F 到二次函数图象的垂直距离 .

(3) 在 (2) 的条件下 , 当点 F 到二次函数图象的垂直距离最小时 , 在以 A , B , E , F 为顶点的菱形内部是否存在点 Q , 使得 AQ , BQ , FQ 之和最小 , 若存在 , 请求出最小值 . 若不存在 , 请说明理由 .



- 【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$.
 (2) $6 - 2\sqrt{3}$ 或 $-2 + 2\sqrt{3}$.
 (3) 存在, 最小值为 $4\sqrt{3}$.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + \frac{5}{2}$ 过点 $A(1, 0)$, $B(5, 0)$,

$$\therefore 0 = a + b + \frac{5}{2},$$

$$0 = 25a + 5b + \frac{5}{2},$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = -3,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}.$$

(2) 由(1)知抛物线对称轴为直线 $x = 3$, 顶点坐标为 $(3, -2)$, $AB = 4$,

$\therefore$ 抛物线与 y 轴相交于点 C ,

$$\therefore C(0, \frac{5}{2}).$$

①如图1, 如 AB 为菱形的边,

则 $EF \parallel AB$, $EF = AB = 4$, 且 E 的横坐标为 3 ,

$\therefore F$ 的横坐标为 7 或 -1 ,

$\therefore AE = AB = 4$, $AM = 2$, $EM \perp AB$,

$$\therefore EM = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore F(7, 2\sqrt{3}) \text{ 或 } F(-1, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore \text{当 } x = 7 \text{ 时, } y = \frac{1}{2} \times 49 - 7 \times 3 + \frac{5}{2} = 6,$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 到二次函数图象的垂直距离为 } 6 - 2\sqrt{3}.$$

显然 $x = -1$ 与 $x = 7$ 时的垂直距离相等,

$$\therefore \text{点 } F \text{ 到二次函数图象的垂直距离为 } 6 - 2\sqrt{3}.$$

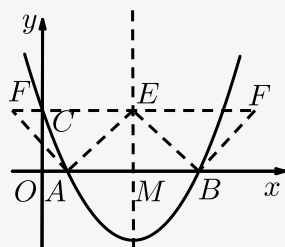
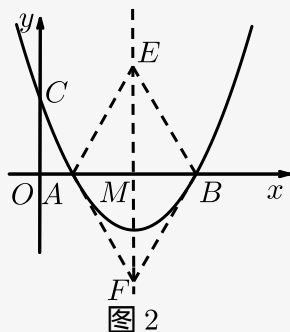
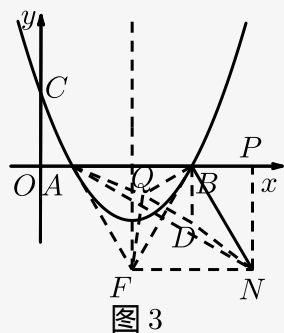


图 1

$\therefore$ 点 F 到二次函数图象的垂直距离为 $-2 + 2\sqrt{3}$.


$$\therefore AQ + BQ + FQ \text{ 的和的最小值为 } 4\sqrt{3}.$$



【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

4. 正方形

有一组 _____ 相等且有一个角是 _____ 的 _____ 是正方形．因此，正方形存在性问题可转化为 _____ 存在性加 _____ 存在性问题．

如在平面内找两点C和D,使得以点A、B、C、D为顶点的四边形为正方形.



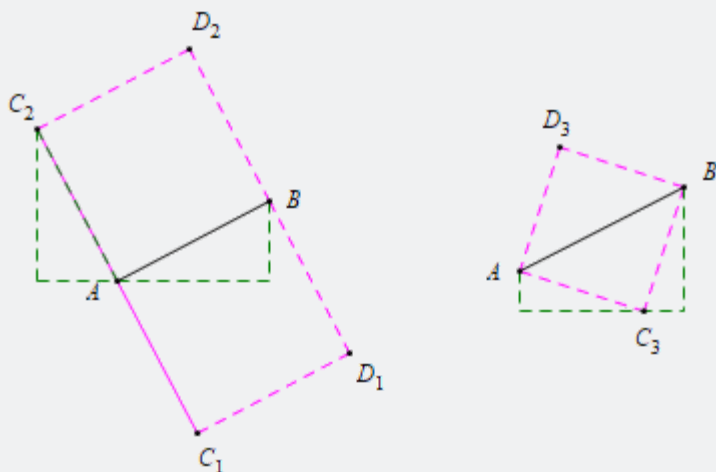
第一步，构造“一线三直角”全等模型先找到点C使得 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，这样，就相当于找到了正方形的一半；

第二步，由“平移法”或“中点法”找到点D使得以点A、B、C、D为顶点的四边形为平行四边形，这样作出的平行四边形就是正方形．

 教法备注

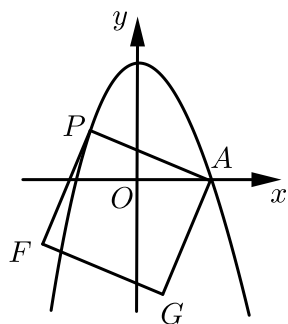
有一组邻边相等且有一个角是直角的平行四边形是正方形．因此，正方形存在性问题可转化为等腰直角三角形存在性加平行四边形存在性问题．

如图



典题精练

10. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(2, 0)$ 和点 $(-1, 2)$ 。



(1) 求抛物线的解析式。

(2) $P(m, t)$ ($m < 2$) 是抛物线上一动点，连接 PA 。以 PA 为边作图示一侧的正方形 $APFG$ ，随着点 P 的运动，正方形的大小与位置也随之改变，当顶点 F 或 G 恰好落在 y 轴上时，求对应的 P 点坐标。

【答案】 (1) $y = -x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ 。

(2) $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$, $(-1, 2)$, $\left(\frac{-1 + \sqrt{31}}{3}, \frac{-1 + \sqrt{31}}{3}\right)$, $\left(\frac{-1 - \sqrt{31}}{3}, \frac{-1 - \sqrt{31}}{3}\right)$ 。

【解析】 (1) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(2, 0)$ 和点 $(-1, 2)$ 。

$$\text{得} \begin{cases} -4 + 2b + c = 0 \\ -1 - b + c = 2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = \frac{1}{3} \\ c = \frac{10}{3} \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ 。

(2) 当点 G 落在 y 轴上时，

如图1，过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M ，

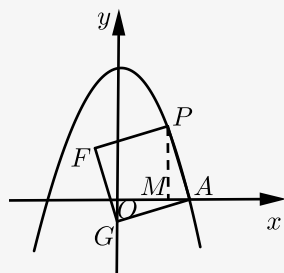


图1

$\because$ 四边形 $APFG$ 是正方形，

$\therefore AP = GA$ ， $\angle PAG = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle PAM + \angle GAO = 90^\circ$ ，

$\because \angle AOG = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AGO + \angle GAO = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle PAM = \angle AGO$ 。

又 $\angle PMA = \angle AOG = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle PMA \cong \triangle AOG$ ，

$\therefore PM = AO = 2$ ，

$\therefore t = 2$ ，有 $-m^2 + \frac{1}{3}m + \frac{10}{3} = 2$ ，

解得 $m = \frac{4}{3}$ 或 $m = -1$ （舍去），

$\therefore P$ 点坐标为 $(\frac{4}{3}, 2)$ ，

如图2，过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M ，

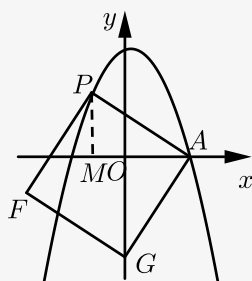


图2

同理可以证得 $\triangle APM \cong \triangle GAO$ ，

$\therefore PM = AO = 2$ ，

$\therefore t = 2$ ，有 $-m^2 + \frac{1}{3}m + \frac{10}{3} = 2$ ，

解得 $m = -1$ 或 $m = \frac{4}{3}$ （舍去），

$\therefore P$ 点坐标为 $(-1, 2)$ ，

当点 F 落在 y 轴上时，

如图3，过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M ，过点 F 作 $FN \perp PM$ 于点 N ，

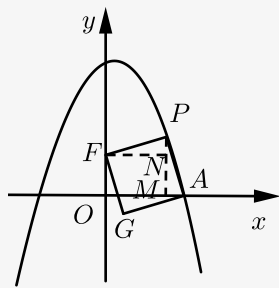


图3

同理可以证得 $\triangle PFN \cong \triangle APM$,

$$\therefore FN = PM,$$

$$\therefore t = m, \text{ 有 } -m^2 + \frac{1}{3}m + \frac{10}{3} = m$$

$$\text{解得 } m = \frac{-1 + \sqrt{31}}{3} \text{ 或 } m = \frac{-1 - \sqrt{31}}{3} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore P \text{ 点坐标为 } \left(\frac{-1 + \sqrt{31}}{3}, \frac{-1 + \sqrt{31}}{3} \right),$$

如图4, 过点P作 $PN \perp y$ 轴于点N, 过点A作 $AM \perp PN$, 交PN的延长线于点M,

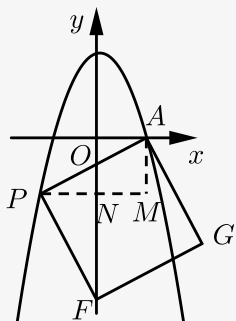


图4

同理可以证得 $\triangle PAM \cong \triangle FPN$,

$$\therefore AM = PN,$$

$$\therefore t = m, \text{ 有 } -m^2 + \frac{1}{3}m + \frac{10}{3} = m,$$

$$\text{解得 } m = \frac{-1 - \sqrt{31}}{3} \text{ 或 } m = \frac{-1 + \sqrt{31}}{3} \text{ (舍去)},$$

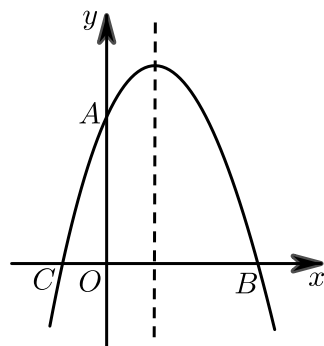
$$\therefore P \text{ 点坐标为 } \left(\frac{-1 - \sqrt{31}}{3}, \frac{-1 - \sqrt{31}}{3} \right)$$

综上所述, P点的坐标为 $\left(\frac{4}{3}, 2\right), (-1, 2),$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{31}}{3}, \frac{-1 + \sqrt{31}}{3} \right), \left(\frac{-1 - \sqrt{31}}{3}, \frac{-1 - \sqrt{31}}{3} \right).$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

11. 如图, 对称轴为 $x = 1$ 的抛物线经过 $A(0, 3), B(3, 0)$ 两点, 抛物线与 x 轴的另一交点为 C .



- (1) 求抛物线的解析式 .
- (2) P 为抛物线上的动点 , 直线 PC 交抛物线对称轴于点 D , 连接 AP , AD , AC , 若 $\triangle PAD$ 与 $\triangle PAC$ 面积之比为 $1:3$, 求点 P 的坐标 .
- (3) 点 M 在抛物线上 , 点 N 在对称轴上 , 点 Q 在坐标平面内 , 当四边形 $BMNQ$ 为正方形时 , 直接写出点 Q 的坐标 .

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) $(\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$.

(3) $(\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2})$ 或 $(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2})$ 或 $(\frac{7-\sqrt{17}}{2}, \frac{-5+\sqrt{17}}{2})$ 或 $(\frac{7+\sqrt{17}}{2}, \frac{-5-\sqrt{17}}{2})$.

【解析】 (1) $\because$ 抛物线的对称轴为 $x = 1$, $B(3, 0)$,

$\therefore C(-1, 0)$,

设抛物线解析式为 $y = a(x+1)(x-3)$,

把 $A(0, 3)$ 代入得 $a \cdot 1 \cdot (-3) = 3$, 解得 $a = -1$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -(x+1)(x-3)$,

即 $y = -x^2 + 2x + 3$.

(2) 作 $PM \perp BC$, M 为垂足 , 对称轴与 x 轴相交于点 N ,

如图 , 设 $P(x, -x^2 + 2x + 3)$,

$\because \triangle PAD$ 与 $\triangle PAC$ 面积之比为 $1:3$,

$\therefore PD:PC = 1:3$,

$\therefore DN \parallel PM$,

$\therefore MN:MC = 1:3$,

在如图1中 , $(x-1):(x+1) = 1:3$, 解得 $x = 2$, 此时 P 点坐标为 $(2, 3)$;

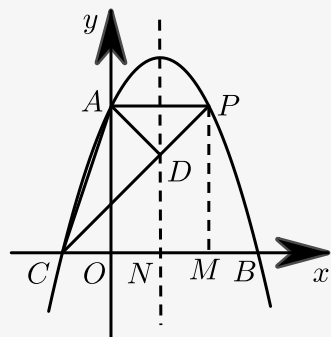


图 1

在如图2中, $(1-x):(x+1)=1:3$, 解得 $x=\frac{1}{2}$, 此时 P 点坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$.

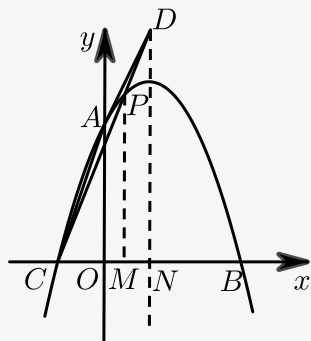


图 2

(3) 作 $MF \perp$ 直线 $x=1$ 于 F , $ME \perp x$ 轴于 E , 设 $M(x-x^2+2x+3)$,

如图3, 易得 $\triangle BME \cong \triangle NMF$,

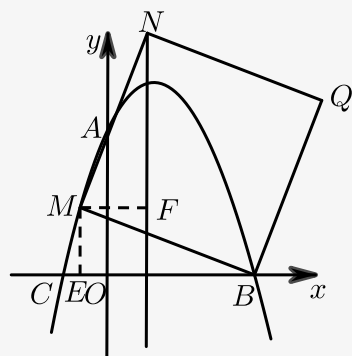


图 3

$$\therefore ME = MF,$$

$$\therefore x^2 + 2x + 3 = 1 - x,$$

$$\text{整理得 } x^2 - 3x - 2 = 0, \text{ 解得 } x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2},$$

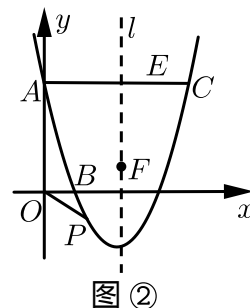
$$\therefore M\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right),$$

$$\text{把 } M \text{ 点绕 } B \text{ 点顺时针旋转 } 90^\circ \text{ 得到点 } Q, \text{ 则 } Q \text{ 点的坐标为 } \left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right) \text{ 或}$$

$$\left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right);$$

如图4, 易得 $\triangle BME \cong \triangle NMF$,

如图②， F 是抛物线的对称轴 l 上的一点， Q 是坐标平面内一点，在抛物线上是否存在点 P 使以 P 、 O 、 F 、 Q 为顶点且 OF 为对角线的四边形是正方形？若存在，直接写出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

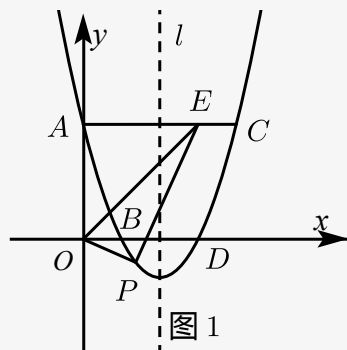


【答案】(1) $y = x^2 - 4x + 3$.

(2) 当 $m = \frac{5}{2}$ 时， S 有最大值是 $\frac{75}{8}$.

(3) 存在，点 P 的坐标是： $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

【解析】(1) 如图1，设抛物线与 x 轴的另一个交点为 D ，



由对称性得： $D(3, 0)$ ，

设抛物线的解析式为： $y = a(x-1)(x-3)$ ，

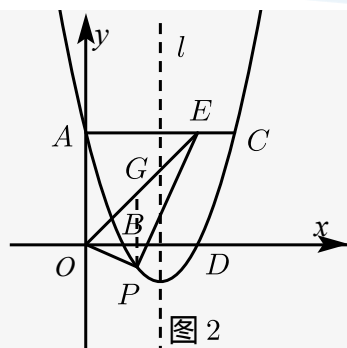
把 $A(0, 3)$ 代入得： $3 = 3a$ ，

$a = 1$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式： $y = x^2 - 4x + 3$.

(2) 如图2， $\because \triangle AOE$ 的面积是定值，所以当 $\triangle OEP$ 面积最大时，四边形 $AOPE$ 面积最大，

设 $P(m, m^2 - 4m + 3)$ ，



$\because OE$ 平分 $\angle AOB$, $\angle AOB = 90^\circ$,

$\therefore \angle AOE = 45^\circ$,

$\therefore \triangle AOE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AE = OA = 3$,

$\therefore E(3, 3)$,

易得 OE 的解析式为: $y = x$,

过 P 作 $PG \parallel y$ 轴, 交 OE 于点 G ,

$\therefore G(m, m)$,

$\therefore PG = m - (m^2 - 4m + 3) = -m^2 + 5m - 3$,

$\therefore S_{\text{四边形 } AOPE} = S_{\triangle AOE} + S_{\triangle POE}$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 + \frac{1}{2} PG \cdot AE$,

$= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \times 3 \times (-m^2 + 5m - 3)$,

$= -\frac{3}{2}m^2 + \frac{15m}{2}$,

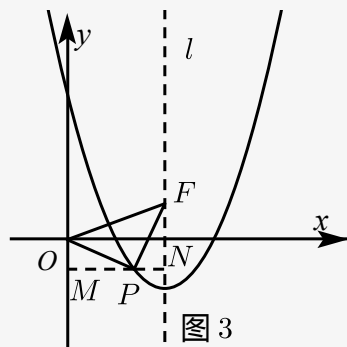
$= \frac{3}{2} \left(m - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{75}{8}$,

$\because -\frac{3}{2} < 0$,

$\therefore$ 当 $m = \frac{5}{2}$ 时, S 有最大值是 $\frac{75}{8}$.

(3) 分四种情况:

① 当 P 在对称轴左边, 且在 x 轴下方时, 如图3, 过 P 作 $MN \perp y$ 轴, 交 y 轴于 M , 交 l 于 N ,



$\therefore$ 是正方形,

$\therefore \triangle OPF$ 是等腰直角三角形, 且 $OP = PF$,

易得 $\triangle OMP \cong \triangle PNF$,

$$\therefore OM = PN,$$

$$\therefore P(m, m^2 - 4m + 3),$$

$$\text{则 } -m^2 + 4m - 3 = 2 - m,$$

$$\text{解得: } m = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \text{ (舍)}, \frac{5 - \sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-\sqrt{5} + 1}{2} \right);$$

②当 P 在对称轴左边且在 x 轴上方时,如图3(1),

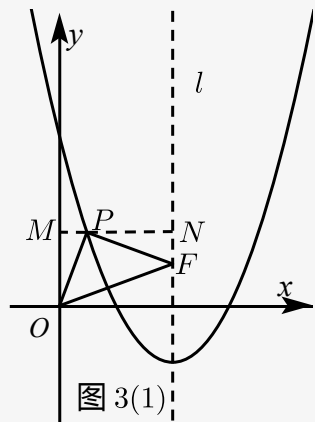


图 3(1)

$$\text{同理得 } 2 - m = m^2 - 4m + 3,$$

$$m_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ (舍)}, m_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore P \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right);$$

③如图4,当 P 在对称轴右边,且在 x 轴下方时,过 P 作 $MN \perp x$ 轴于 N ,过 F 作 $FM \perp MN$ 于 M ,

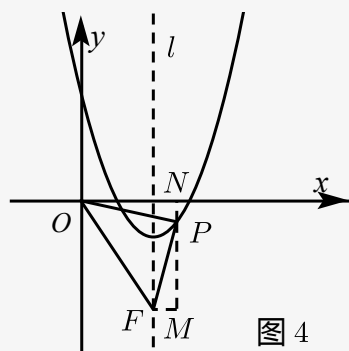


图 4

$$\text{同理得 } \triangle ONP \cong \triangle PMF,$$

$$\therefore PN = FM,$$

$$\text{则 } -m^2 + 4m - 3 = m - 2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ (舍)};$$

$$P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right);$$

④当 P 在对称轴右边,且在 x 轴上方时,

同理得： $m^2 - 4m + 3 = m - 2$ ，

$$m_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, m_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \text{ (舍)},$$

$$\therefore P\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right).$$

综上所述，点 P 的坐标是： $\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-\sqrt{5} + 1}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题